Cours de mathématiques

P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

Grands théorèmes d'échange et intégrales à paramètre

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

I. Théorèmes d'échange

I.1. Théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée (admis) :

Soient $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$, $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I
2. (f_n) converge simplement vers f sur I
3. f est continue par morceaux sur I
4. Hypothèse de domination : $\exists \varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I , telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I et f est intégrable sur I , $(\int_I f_n)$ converge, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Remarques :

- La fonction dominante φ ne doit pas dépendre de n .
- Si I est borné, on peut choisir comme domination une fonction constante.

I.2. Échange série-intégrale

Théorème d'échange série-intégrale en norme 1 :

Soit $u_n : I \rightarrow \mathbb{K}$, telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I
2. $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $f : x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, avec f continue par morceaux sur I .
3. $\sum \int_I |u_n|$ converge

Alors f est intégrable sur I , $\sum \int_I u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_I f$.

Remarque :

Si f est intégrable sur I et u_n est de signe constant sur I , on peut montrer que $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Remarque :

Si on a les hypothèses f continue par morceaux et intégrable sur I , $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est continue par morceaux et intégrable sur I telles que $\sum u_n$ converge simplement vers f sur I , mais que $\sum \int_I |u_n|$ ne converge pas :

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = f - S_n$. Par somme finie, S_n est intégrable sur I et par différence R_n est

intégrable sur I , et $\int_I f = \int_I S_n + \int_I R_n = \int_I \sum_{k=0}^n u_k + \int_I R_n = \sum_{k=0}^n \int_I u_k + \int_I R_n$ (car somme finie et u_n intégrable.)

On essaie alors de montrer que $\int_I R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et dans ce cas $\sum \int_I u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n = \int_I f$.

Pour obtenir $\int_I R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on utilise soit le théorème de convergence dominée, soit une méthode directe.

2. Intégrales à paramètre

Cadre d'étude :

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$.

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \int_I f(x, t) dt$.

2.1. Théorème de continuité sous le signe intégrale

Théorème de continuité sous le signe intégrale :

On suppose que :

1. $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
2. $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A
3. $\exists \varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors $F(x)$ existe et est continue sur A .

Preuve :

$\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et continue par morceaux sur I , donc F existe bien.

Soit $a \in A$. Pour montrer que F est continue en a , on utilise une caractérisation séquentielle. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow a$. On veut montrer que $(F(x_n))$ converge vers $F(a)$. $F(x_n) = \int_I f(x_n, t) dt$, $F(a) = \int_I f(a, t) dt$.

On note $g_n : t \mapsto f(x_n, t)$, et $g : t \mapsto f(a, t)$. g_n et g sont continues par morceaux et intégrables sur I .

$\forall t \in I, g_n(t) = f(x_n, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a, t)$, car $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue en a . Donc (g_n) converge simplement vers g sur I . $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |g_n(t)| = |f(x_n, t)| \leq \varphi(t)$, φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I .

Donc par théorème de convergence dominée appliqué à la suite (g_n) , $\int_I g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_I g(t) dt$, c'est-à-dire $F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(a)$. Ainsi par caractérisation séquentielle, F est continue en a .

Cela étant vrai $\forall a \in A$, F est continue sur A .

Remarques :

- L'hypothèse 3 du théorème implique que $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I , mais en pratique, on commence généralement par l'étude de l'existence de f , ce qui revient à étudier l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$.
- Si on ne parvient pas à dominer pour tout couple (x, t) de $A \times I$, on restreint A , notamment sur des segments (domination locale), mais jamais I .
- La preuve séquentielle du théorème s'adapte à la recherche de limites de F aux bornes de A . Si a est une borne de A dans $\overline{\mathbb{R}}$, pour chercher une limite de F en a si elle existe, on peut considérer une suite (x_n) d'éléments de A qui tend vers a et étudier la suite $(F(x_n))$. D'autres méthodes sont possibles également (directe par exemple).

Corollaire :

On suppose que :

1. $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
2. $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A
3. Pour tout segment B inclus dans A , $\exists \varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall (x, t) \in B \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Alors $F(x)$ existe et est continue sur A .

Exemple : première étude de la fonction Gamma d'Euler :

Sous réserve d'existence, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Domaine de définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_x(t) = t^{x-1} e^{-t}$. On étudie l'intégrabilité de f_x sur $I =]0, +\infty[$.

· f_x est continue sur I et positive.

· $f_x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \geq 0$, et $\frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ $\Leftrightarrow x > 0$, donc par théorème de comparaison, f_x est intégrable sur $]0, 1]$ $\Leftrightarrow x > 0$.

· $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par théorème de comparaison, f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

· Finalement, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[\Leftrightarrow x > 0$.

Ainsi Γ est définie sur $A =]0, +\infty[$.

– Équation fonctionnelle : Soient $x > 0$, $(\varepsilon, y) \in I^2$. $\int_{\varepsilon}^y t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{\varepsilon}^y + x \int_{\varepsilon}^y t^{x-1} e^{-t} dt$

Par passage à la limite, ($\varepsilon \rightarrow 0$ et $y \rightarrow \infty$), on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

– Calcul de $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$, et comme $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, on a $\Gamma(n+1) = n!$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

– Continuité de Γ : Soit $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$.

· $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur I , et $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .

· Soient $[a, b] \subset A$, et $x \in [a, b]$.

◦ Si $t \in]0, 1]$, $\ln(t) \leq 0 \Rightarrow x \mapsto e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}$ est décroissante et positive
 $\Rightarrow \forall x \in [a, b]$, $0 \leq e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} \leq e^{(a-1)\ln(t)} e^{-t} = t^{a-1} e^{-t}$

◦ Si $t \in [1, +\infty[$, $\ln(t) \geq 0 \Rightarrow x \mapsto e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}$ est croissante et positive
 $\Rightarrow \forall x \in [a, b]$, $0 \leq e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t} \leq e^{(b-1)\ln(t)} e^{-t} = t^{b-1} e^{-t}$.

Soit $\varphi : t \mapsto \begin{cases} t^{a-1} e^{-t}, & \text{si } t \in]0, 1] \\ t^{b-1} e^{-t}, & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur I

Par construction, $\forall (x, t) \in [a, b] \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$

Ainsi par théorème de continuité avec hypothèse de domination locale, Γ est continue sur A .

2.2. Théorème de dérivabilité sous le signe intégrale

Théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, ou formule de Leibniz :

On suppose que :

1. $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I

2. $\forall (x, t) \in A \times I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe

3. $\forall x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I

4. $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A

5. $\exists \psi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $\forall (x, t) \in A \times I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$

Alors $\forall x \in A$, $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ existe, $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ,

et $\forall x \in A$, $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Preuve (rapide) :

Soit $a \in A$, $x \in A \setminus \{a\}$. $\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \int_I \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a} dt$. À t fixé, on applique le théorème des accroissements

finis à $x \mapsto f(x, t)$ entre a et x : $\exists c_{x,t} \in]a, x[$ ou $]x, a[$ tel que $\frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a} = \frac{\partial f}{\partial x}(c_{x,t}, t)$.

On considère alors $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

On applique alors le théorème de convergence dominée à $g_n(t) = \frac{f(x_n, t) - f(a, t)}{x_n - a}$.

Remarque :

On peut remplacer l'hypothèse de domination par une hypothèse de domination locale.

Corollaire :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que :

1. $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
2. $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall (x, t) \in A \times I, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ existe
3. $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I
4. $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur A
5. $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists \psi_k$ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \psi_k(t)$$

Alors $F : x \mapsto \int_I f(x, t)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^p$ sur A , et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall x \in A, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$.

Remarques :

- On peut remplacer l'hypothèse de domination par une hypothèse de domination locale.
- Si le corollaire s'applique pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A .

Exemple : suite de l'étude de la fonction Gamma d'Euler :

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, définie sur $A = \mathbb{R}_+^*$

- Caractère $\mathcal{C}^1$ sur A : On pose $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)} e^{-t}$. $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t) t^{x-1} e^{-t}$.

· Fixons $x > 0$. $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$, et en 0, $\ln(t) t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) t^{x-1} < 0$.

Soit $\gamma \in]1-x, 1[$, $t^\gamma \ln(t) t^{x-1} = t^{\gamma+x-1} \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, et comme $\gamma < 1$, par règle de Riemann en 0,

$t \mapsto \ln(t) t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. Par théorème de comparaison, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

En ∞ , $\ln(t) t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $\frac{1}{t^2} \geq 0$, et $2 > 1$, donc $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

· $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur A .

· Soit $[a, b] \subset A$, et $x \in [a, b]$. $\forall t \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t} \leq \begin{cases} t^{a-1} |\ln(t)| e^{-t}, & \text{si } t \in]0, 1] \\ t^{b-1} |\ln(t)| e^{-t}, & \text{si } t > 1 \end{cases} = \psi(t)$.

ψ est positive, continue par morceaux et intégrable sur I .

· $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur I .

D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout segment $[a, b] \subset A$, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A , et $\forall x \in A, \Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt$. (Remarque : $\Gamma'(1) = -\gamma$).

Par récurrence, on démontre de même que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur A .

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} (\ln(t))^p e^{-t} dt$, et notamment $\Gamma''(x) \geq 0$, donc Γ est convexe sur A .

- Étude de Γ en 0 : $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \Leftrightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\Gamma(1) + x \Gamma'(1) + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} + \Gamma'(1) + o(1)$.